数理解析研究所講究録
1070 巻 1998 年 138-153

Optimal portfolio problem with log-utility function for unobservable mean return

Faculty of Economics,Nagoya City University
(名古屋市立大学経済学部)
肖 凱(Xiao,Kai) 宮原 孝夫(Miyahara,Yoshio) 三澤 哲也(Misawa,Tetsuya)

We focus on the dynamical optimal portfolio problem under the setting such that the mean returns of a risky asset depend on an unobservable regime variable of economy. The regime variable is assumed to be a continuous-time Markov chain with two states. The investor estimates the value of regime variable from the information of the risky asset. We analyse the optimal consumption and portfolio problem with the utility function of logarithm type, and thereby we obtain a Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) equation for the value function. Since it is difficult to find an explicit form of the solution to the HJB equation, we investigate the properties of the solution by numerical methods.

1. 背景と動機

投資家が証券に投資する目的は,それから得られる利益を現在及び将来にわたっての消費から得られる効用を最大にするためである.そのために,手元にある総資産を消費と投資にどのように配分するのが最適であるかという「最適消費・投資問題(意志決定問題)」を解くことが必要になる.

Merton[11,12] 等がこの問題について,次のようなモデルを取り上げ,最適消費・投資問題を一種の"確率的最適制御問題"として定式化した.

危険資産(=株式のような不確実性を持つ資産)の価格過程S_tは確率微分方程式

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad 0 \le t \le T$$

に従うと仮定する[1].ここて,μ, σ は定数で,B_t は標準ブラウン運動である.安全資産の価格過程β_tは微分方程式

$$d\beta_t = r\beta_t dt, \quad 0 \le r < 1$$

を満たすと仮定する.投資家のポートフォリオ$\Theta = \{(\theta_t^0, \theta_t^1); 0 \le t \le T\}$ に対して,t 時点での投資家の総資産は$w_t = \theta_t^0 \beta_t + \theta_t^1 S_t$ である.消費cから得られる効用を効用関数$u(c)$ で計る[2].いま,最終時点Tでの総資産w_T をその時点で全て消費するとすれば,初期時点$(t = 0)$ における総

[1]この解は$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\}$ となり,S_t は幾何ブラウン運動と呼ばれる.
[2]効用関数u(c):一般に,$u' > 0; u'' < 0$ という性質(収穫逓減法則)を持っているものと仮定される.

資産をw とするとき，投資家の時点Tまでの割引総期待効用$U(w,C,\Theta)$ が

$$U(w,C,\Theta)=E[\int_0^T \rho(t)u(c_t)dt]$$

で評価される．ここで，$\rho(t)$は割引率である．Θ が上の式の右辺に直接現れないが，総資産$\{w_t; 0\leq t\leq T\}$ がΘ に依存しており，消費戦略$C=\{c_t; 0<t<T\}$ が総資産$\{w_t; 0<t<T\}$ に依存しているので，投資家の総期待効用は投資戦略Θ に依存している．総資産$\{w_t; 0\leq t\leq T\}$ を正の値に保ちつつ，投資家の時点Tまでの割引総期待効用$U(w,C,\Theta)$ を最大にするように消費・投資戦略$(C,\Theta)=\{(c_t,\theta_t); 0\leq t\leq T\}$ を決定することが投資家の目的であり，次の最適消費・投資問題

$$J(w)=\sup_{(C,\Theta)\in\Lambda(w)} U(w,C,\Theta)$$

に到達する[3]．

上の問題に対して，その後，危険資産の確率微分方程式の係数を一般化したり，最終時点Tでの総資産w_T を遺産として，遺産効用関数$v(w_T)$ を用いて投資家の時点Tまでの割引総期待効用$U(w,C,\Theta,)$ を

$$U(w,C,\Theta)=E[\int_0^T \rho(t)u(c_t)dt+\rho(T)v(w_T)]$$

で評価したりするモデルも多く研究されている[1,2,3,4,5,6,7,8,9]．特に，本田は[7]において，景気変動Y_t が危険資産の価格過程に影響を与えることを考慮に入れて，

$$dS_t=\mu(Y_t)S_tdt+\sigma S_tdB_t$$

という形のモデルを検討した．ここで，景気の状態を表す変量Y_t は$\{0,1\}$ の値をとる時間的に一様な対称2状態連続時間マルコフ連鎖としている．このモデルに対して，"乗数型$u(c)=c^\alpha/\alpha; (\alpha>0)$ "[4]の効用関数を採用し，最適消費戦略c_t^* と最適投資戦略ϕ_t^*を求め，$(\alpha=1/2)$ の場合について，分析している．

本論文では，本田の論文を基礎にして，(1) 景気変動を必ずしも対称ではない2状態マルコフ連鎖に一般化し，(2) 効用関数としては"対数型$u(c)=\alpha\log(c)$ "[5]関数を採用し，その場合の最適消費・投資問題を，数値解析的方法を援用しながら分析する．

---

[3] $\Lambda(w)\equiv\{(C,\Theta): w_t=w+\int_0^t(\theta_s^0 d\beta_s+\theta_s^1 dS_s)-\int_0^t c_s ds\ \geq 0,\quad c_s>0,\quad 0\leq t\leq T\}$

[4] $u(c)=c^\alpha/\alpha$: $\lim_{c\to 0}u(c)\to 0$ により，なくても良いような消費財(ぜいたく品)に対応する効用関数．

[5] $u(c)=\alpha\log(c)$: $\lim_{c\to 0}u(c)\to -\infty$ により，なくてはならないような消費財(必需品)に対応する効用関数．

2. モデル

安全資産と一つの危険資産とからなる摩擦のない市場[6]を考える．安全資産の価格過程β_t は微分方程式

$$d\beta_t = r\beta_t dt, \quad 0 \le r < 1 \tag{1}$$

に従うものとし，危険資産の価格過程S_t は景気変動の影響を受け，確率微分方程式

$$dS_t = \mu(Y_t)S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{2}$$

に従うものとする．ここで,確率空間(Ω, F, P) のもとで，B_tは標準ブラウン運動(standard Brownian motion) であり，Y_tは景気変動を表す変量で，$\{0,1\}$ の値をとる時間的一様な２状態連続時間マルコフ連鎖(Markov chain) とする．($Y_t = 0$が不景気を，$Y_t = 1$が好景気を表すものとする.) $\sigma > 0, \mu(0) = \mu_0, \mu(1) = \mu_1$ とし，$\mu_0 < \mu_1$ とする(不景気より好景気の方が期待収益率が高い.). また，Y_tとB_tは互いに独立とする．

Y_t の推移確率を

$$P_{ij}(h) = P(Y_{t+h} = j | Y_t = i), \quad h > 0; \quad i, j = 0, 1 \tag{3}$$

とおき，

$$\lambda_{01} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{01}(h)}{h}, \quad \lambda_{10} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{10}(h)}{h} \tag{4}$$

と定める．逆に，$\{\lambda_{01}, \lambda_{10}\}$ が与えられると，(3), (4) 式の関係を満たすような$\{0,1\}$ 上のマルコフ連鎖が一意的に定まることも知られている．(4) 式から分かるように，λ_{ij} は，Y_t の状態iから状態jへの推移の強さを表している[7].

投資家のｔ時点での利用可能な情報は$F_t^S = \sigma\{S_s; s \le t\}$ (=危険資産S_t のｔ時点までの情報の集まり) である．したがって，投資家はこの情報に基いてY_t の値を推定しつつ，自己の期待効用を最大にするような消費・投資戦略を採用する．

変量Y_t の推定値をπ_t とおく．すなわち，

$$\pi_t = E[Y_t | F_t^S] = Pr(Y_t = 1 | F_t^S), \quad \pi_0 = p \tag{5}$$

である．Liptser − Shiryayev の定理(9.1)[10] により，π_t は次の方程式を満たしていることが分かる．

$$\begin{aligned} d\pi_t &= [\lambda_{01}(1-\pi_t) - \lambda_{10}\pi_t]dt + \frac{\pi_t(1-\pi_t)(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma} d\bar{B}_t \\ &\equiv \bar{\mu}(\pi_t)dt + \bar{\sigma}(\pi_t)d\bar{B}_t \end{aligned} \tag{6}$$

[6]摩擦のない市場：借入と貸出の利率が同じ，手数料や税金等を考えない，空売りを認め，危険資産からの配当はないとする市場.

[7]本田[7] では，$\lambda_{01} = \lambda_{10}$ の場合を取り扱っている．

ここで, $\bar{B}_t$は$\{F_t^S\}$ のもとでの標準ブラウン運動で,

$$\bar{B}_t = \int_0^t \frac{dS_u - \hat{\mu}(\pi_u)S_u du}{\sigma S_u}, \tag{7}$$
$$\hat{\mu}(\pi_t) = \mu_1\pi_t + \mu_0(1-\pi_t)$$

で定義されている.

注意1. $\bar{\pi}$ を

$$\bar{\pi} = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01}+\lambda_{10}} \tag{8}$$

とおけば, $\pi_t > \bar{\pi}$ のとき, (6) 式より瞬間的な変位の平均$E[\Delta\pi]$は負であるから, 平均的にはπ_t が引き下げられる傾向にある. 逆に, $\pi_t < \bar{\pi}$ のとき, 瞬間的な変位の平均は正であるから, 平均的にはπ_t が引き上げられる傾向にある. 言い換えれば, π_t が$\bar{\pi}$ から離れすぎると, $\bar{\pi}$に引き戻される性質を持っているということが分かる.

なお, (6) 式より, π_t の平均値の時間極限$(t \to \infty)$ が$\bar{\pi}$となることも容易に示すことができる. したがって, いわゆる"エルゴード仮説"のもとで考えると, $\bar{\pi}$はπ_tの"定常分布"の平均とみなせる.

このπ_t ならびに$\bar{B}_t$ を用いて, 危険資産の価格過程S_tの方程式は

$$dS_t = \hat{\mu}(\pi_t)S_t dt + \sigma S_t d\bar{B}_t \tag{9}$$

と表現される.

次節以下では, 推測された経済状態$\{\pi_t, F_t^S; 0 \le t \le T\}$ のもとで, 安全資産の価格過程(1), 経済状態Y_t の推定値に関する確率微分方程式(6), 危険資産の価格過程(9) に基づいて, 最適制御問題を検討する.

3. 最適制御問題

ある投資家の初期時点$(t=0)$ における総資産をw_0 とし, 投資期間$[0,T]$ におけるこの投資家の消費過程を$C = \{c_t, 0 \le t \le T\}$ とする. 但し, $c_t \ge 0$ とし, $C_t = \int_0^t c_s ds < \infty$ は時点 t までの総消費量を表す. この投資家は総資産の一部を市場にある証券に投資し, 残りの総資産を消費に回すことができるので, t時点での安全資産の保有量(枚数) をθ_t^0, 危険資産の保有量(枚数) をθ_t^1と表記すれば[8], 投資家が決定すべきポートフォリオ(portfolio) $\Theta = \{\theta_t^0, \theta_t^1; 0 \le t \le T\}$ と消費過程$C = \{c_t, 0 \le t \le T\}$ はF_t^S- 可測な確率過程である. 投資期間内に全ての総資産を消費しなかった場合, 最終時点において残る総資産はw_T である. 消費過程$C = \{c_t, 0 \le t \le T\}$ を投資

[8] $\theta_t^0 < 0$: 借金することを意味とし, $\theta_t^1 < 0$: 空売りすることを意味とする.

家の消費戦略(consumption plan)と呼ぶ．現時点 t における消費c_t から得られる効用を$u(c_t)$ とし，最終時点での総資産w_T から得られる効用を$u(w_T)$ とする．このとき，投資家の総効用は

$$U(w_T, C, \Theta) = \int_0^T e^{-\rho t} u(c_t) dt + u(w_T) \tag{10}$$

で与えられる．ここで，効用関数$u(c)$ は$u(c) = \alpha \log(c), \alpha > 0$ であり，$1 > \rho > 0$ は割引率である[9]．

投資戦略$\Theta = \{\theta_t; 0 \le t \le T\} = \{(\theta_t^0, \theta_t^1); 0 \le t \le T\}$ に対して，t 時点での投資家の総資産は

$$w_t = \theta_t^0 \beta_t + \theta_t^1 S_t \tag{11}$$

である．初期時点$(t = 0)$ における総資産をw_0 とするとき，次の条件[10]

$$w_t = w_0 + \int_0^t (\theta_s^0 d\beta_s + \theta_s^1 dS_s) - \int_0^t c_s ds \ge 0, \quad t \in [0, T] \tag{12}$$

を満たすような消費・投資戦略(C, Θ) を実行可能戦略と呼ぶ．その全体を$\hat{\Lambda}(w_0)$ と表記する．

投資戦略Θ に対して，ϕ_tを

$$\phi_t = \begin{cases} 0, & if \quad w_t = 0 \\ \theta_t^1 S_t / w_t, & if \quad w_t \ne 0 \end{cases} \tag{13}$$

で定義する．このとき，総資産w_tの満たすべき方程式は

$$\begin{aligned} dw_t &= \theta_t^0 d\beta_t + \theta_t^1 dS_t - c_t dt \\ &= (\theta_t^0 \beta_t r + \theta_t^1 \hat{\mu}(\pi_t) S_t - c_t) dt + w_t \phi_t \sigma d\bar{B}_t \\ &= [w_t \phi_t (\hat{\mu}(\pi_t) - r) + r w_t - c_t] dt + w_t \phi_t \sigma d\bar{B}_t \\ &\equiv \mu_w(w_t, \pi_t, \phi_t, c_t) dt + \sigma_w(w_t, \phi_t) d\bar{B}_t \end{aligned} \tag{14}$$

となる．

実行可能戦略$(C, \Theta) \in \hat{\Lambda}(w_0)$ に対して，上のように$\Phi = \{\phi_t; 0 \le t \le T\}$ を対応させるとき，$(C, \Theta) \to (C, \Phi)$ なる対応は1対1 である．そこで，$\Lambda(w_0) = \{(C, \Phi) : (C, \Theta) \in \hat{\Lambda}(w_0)\}$ と置き，$(C, \Phi) \in \Lambda(w_0)$ も消費・投資戦略と呼ぶことにする．

いままで，出発点を$t = 0$ として議論してきたが，出発点を一般の$t (0 \le t \le T)$ として，期間$[t, T]$ で問題を同様に考えることができる．そのさい，モデルの方程式がマルコフ的であることより，最適戦略もマルコフ的であることが想定される．したがって，考える消費・投資戦略もマルコフ的なものを考えれば良いことになる．

---

[9]割引率$1 > \rho > 0$の値が大きければ大きいほど，将来において消費する効用より，現在消費する効用の方が高くなる．

[10]この条件は自己資金充足的(self-financing)と呼ばれる

このとき，時刻 t における資産総額が w であり，$\pi_t = \pi$ であるとすると，消費・投資戦略 (C, Φ) から得られる期待効用は

$$\begin{aligned} V^{(C,\Phi)}(w,\pi,t) &= E^{(w,\pi,t)}[U(w,C,\Theta)] \\ &= E^{(w,\pi,t)}[\int_t^T e^{-\rho s}u(c_s)ds + u(w_T)] \\ &\equiv E[\int_t^T e^{-\rho s}u(c_s)ds + u(w_T)|^{w_t=w}_{\pi_t=\pi}] \end{aligned} \tag{15}$$

で評価される．この期待効用を最大にすることが投資家の目標であり，次の最適化問題

$$V(w,\pi,t) = \sup_{(C,\Phi)\in A(w_0)} V^{(C,\Phi)}(w,\pi,t) \tag{16}$$

に到達する．この $V(w,\pi,t)$ が $[0,\infty) \times [0,1] \times [0,T]$ 上の $C^{2,2,1}$ 級関数として定まっていると仮定すれば，この $V(w,\pi,t)$ は次の Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程式

$$\sup_{(c,\phi)\in R_+ \times R} D^{(c,\phi)}J(w,\pi,t) + e^{-\rho t}u(c) = 0, \quad J(w,\pi,T) = e^{-\rho T}u(w) \tag{17}$$

の解になっている．ここで，

$$\begin{aligned} D^{(c,\phi)}J(w,\pi,t) &= J_w(w,\pi,t)\mu_w(w,\pi,\phi,c) + \frac{1}{2}J_{ww}(w,\pi,t)\sigma_w^2(w,\phi) \\ &+ J_\pi(w,\pi,t)\bar{\mu}(\pi) + \frac{1}{2}J_{\pi\pi}(w,\pi,t)\bar{\sigma}^2(\pi) \\ &+ J_{w\pi}(w,\pi,t)\sigma_w(w,\phi)\bar{\sigma}(\pi) + J_t(w,\phi,t) \end{aligned} \tag{18}$$

である．以下，我々はこの HJB 方程式が解を持つものとして，その解の性質を調べることにする．

まず $J(w,\pi,t)$ について，次の仮定を置く．

仮定 1：HJB 方程式の解 $J(w,\pi,t)$ がただ一つ存在し，

$$J(w,\pi,t) = f(\pi,t) + g(t)u(w); \quad f(\pi,T) = 0, \quad g(T) = 1 \tag{19}$$

と分離できる．

この仮定のもとでは，$D^{(c,\phi)}J(w,\pi,t) + e^{-\rho t}u(c)$ が

$$\begin{aligned} D^{(c,\phi)}J(w,\pi,t) + e^{-\rho t}u(c) &= f_\pi(\pi,t)\bar{\mu}(\pi) + \frac{1}{2}f_{\pi\pi}(\pi,t)\bar{\sigma}^2(\pi) + f_t(\pi,t) \\ &+ \alpha g(t)[\frac{\mu_w}{w} - \frac{1}{2}\frac{\sigma_w}{w^2}] + \alpha[g_t(t)\log(w) + e^{\rho t}\log(c)] \end{aligned} \tag{20}$$

となる．これを最大にするための必要条件より，最適戦略は

$$c_t^* = \frac{w_t}{e^{\rho t}g(t)}; \quad \phi_t^* = \frac{\hat{\mu}(\pi_t) - r}{\sigma^2} \tag{21}$$

でなければならない．また，$g(t)$ は

$$g(t) = 1 + \frac{1}{\rho}(e^{-\rho t} - e^{-\rho T}) \tag{22}$$

でなければならないことが容易に分かる．そのときの総資産過程を w_t^* とすると，w_t^* は

$$dw_t^* = w_t^*\{[\frac{\hat{\mu}(\pi_t) - r}{\sigma}]^2 + r - \frac{1}{e^{\rho t}g(t)}\}dt + w_t^*\frac{\hat{\mu}(\pi_t) - r}{\sigma}d\bar{B}_t \tag{23}$$

を満たしている．さらに，HJB 方程式にこの $\{(c_t^*, \phi_t^*); 0 \le t \le T\}$ を代入して，$f(\pi, t)$ についての線形偏微分方程式

$$f_\pi(\pi, t)\bar{\mu}(\pi) + \frac{1}{2}f_{\pi\pi}(\pi, t)\bar{\sigma}^2(\pi) + f_t(\pi, t) + h(\pi, t) = 0, \quad f(\pi, T) = 0 \tag{24}$$

が得られる．ここで，

$$h(\pi, t) = \alpha g(t)\{[\frac{\hat{\mu}(\pi) - r}{\sigma}]^2 + r\} - \alpha\frac{1 + \rho t + \log[g(t)]}{e^{\rho t}} \tag{25}$$

である．

注意 2. 以上の議論により、上の仮定 1 の条件 (19) は，方程式 (24) が解を持つことと同値であることが分かる．したがって，我々の問題設定の下では，上の仮定 1 は自然な仮定であると言える．

最適消費・投資戦略の基本的性質

(21) 式から最適消費・投資戦略 (c_t^*, ϕ_t^*) の基本的性質を調べてみよう．

●最適消費戦略 c_t^* について：

最適消費戦略の比率 c_t^*/w_t^* は景気変動の推定値 π_t によらずに，ある時間に依存して変動の様子が変化する．つまり，T^* を

$$T^* = -\frac{\log(\rho)}{\rho} \tag{26}$$

とすれば，c_t^*/w_t^* は $T < T^*$ のとき，t の増加関数になり，$T > T^*$ のとき，t の減少関数になる．

これらの性質は，経済的観点からも妥当であると思われる．その考察を以下に述べる．

まず，対数型の効用関数の性質からみると，そのような効用関数を持つ投資家が消費する財は生活必需品に相当するようなものであるから，そのような財は景気が悪くなっても消費せざるをえないし，逆に景気が良いからといって必要以上に消費しても，それから得られる効用はあまり高くならないと考えられる．したがって，c_t^*/w_t^* が景気変動の推定値 π_t に依存しないのは自然であろう．

さらに，$T < T^*$ は短期的な投資を行う投資家を表すと考えられるが，そのような行動を採る投資家は，将来の総資産より現在までの消費の方が望ましく，消費の効用を高める行動を採る．したがって，t の増加と共に w_t^* よりも c_t^* の増加率が上回り，c_t^*/w_t^* が増加すると考えられる．

逆に，$T > T^*$ の場合に相当する長期的な投資を行う投資家は、現在までの消費より将来の総資産の方が望ましいと考え，総資産の効用を高める行動を採る．そのために，c_t^*/w_t^* が減少すると考えられる．

●最適投資戦略 ϕ_t^* について：

(21) 式から分かるように，ϕ^* は危険資産に対する"期待収益プレミアム $(\hat{\mu}(\pi) - r)$"の増加関数になっている．すなわち，危険資産の期待収益とその投資コスト r(安全資産の利子率) との差が ϕ^* を左右する．同時に，$\hat{\mu}(\pi) = \mu_1\pi + \mu_0(1-\pi)$ かつ $\mu_1 > \mu_0$ であるので，ϕ^* は π の増加関数でもある．これらの性質は次のような投資行動を意味すると考えられる．

期待収益プレミアム $(\hat{\mu}(\pi) - r)$ が正であれば，$\phi^* > 0$ となり，つまり投資家は積極的に危険資産に投資する (正の投資)．このような投資行動は好景気になる可能性 π が増大すれば，より活発になると考えられ，それが ϕ^* の増大性に反映している．

逆に，期待収益プレミアム $(\hat{\mu}(\pi) - r)$ が負であれば，$\phi^* < 0$ となり，投資家は危険資産を空売りし (負の投資)，安全資産に投資する．このような投資行動は好景気になる可能性 π が増大すれば，沈静化すると考えられ，よって，$|\phi^*|$ は減少する[11]．

4. 数値解析

景気変動が最適消費・投資戦略 (c_t^*, ϕ_t^*) による投資家の総期待効用 $J(w, \pi, t)$ にどのように影響を与えるかを分析するためには，$f(\pi, t)$ の性質を調べる必要がある．特に投資家は現時点 $(t = 0)$ での情報 (F_0^S) に基づいて景気状態 (Y_0) を推測 (π_0) し，期待効用が最大となるような消費・投資戦略を採るので，$f(\pi, 0)$ の性質を調べることが重要である．

そこで，$f(\pi, t)$ についての偏微分方程式 (24) をクランク・ニコルソン差分法 [7] で離散化し，境界条件 $f(\pi, T) = 0$ の下で数値的に解くことで，$f(\pi, 0)$ の性質を調べる．

数値解析におけるパラメータの基準値は次のように設定する．

$\mu_0 = -0.2,\quad \mu_1 = 0.3,\quad \sigma = 0.2,\quad r = 0.05, \rho = 0.06,\quad \lambda_{01} = \lambda_{10} = 1,\quad \alpha = 1,\quad T = 1$

また，時間の刻み幅を $\Delta t = T/100$ とし，確率 π の刻み幅は $\Delta\pi = 1/100$ とする．

(1) $f(\pi, 0)$ の形状とその意味付け

図1で，パラメータの基準値のもとでの $f(\pi, 0)$ の様子が示されている．

[11] $\phi^* < 0$ だから，ϕ^* 自身は π の増加関数である．

結果

一般に，$f(\pi,0)$ はπ の増加と共に増加すると考えられるが，我々の結果では，

$$\pi^* = \frac{r-\mu_0}{\mu_1-\mu_0}$$

をおおよその分岐点として(注意3参照)，

$(A)\pi < \pi^*$のとき，$\pi\uparrow \Longrightarrow f(\pi,0)\downarrow$

$(B)\pi > \pi^*$のとき，$\pi\uparrow \Longrightarrow f(\pi,0)\uparrow$

となった．これは最適ポートフォリオϕ^* についての前節の性質を考慮すると，次のような経済的に妥当な解釈ができる．

考察

(A) $\pi < \pi^*$ のとき，(7) 式よりこのようなπに対して，$\hat{\mu}(\pi)-r<0$ となり，したがって，$t=0$ でのϕ^*は負となる．これは投資家が危険資産を空売りし($\phi^*<0$, 負の投資)，この分を安全資産に投資する行動を採ることによって収益を得ようとしているということを意味する．このようなポートフォリオϕ^* を採用する投資家にとっては，景気が悪ければ悪いほど($\pi\downarrow 0$)，空売量を増やす($\phi^*<0, |\phi^*|\uparrow$) ことで得られる収益が高くなるから，効用$f(\pi,0)$ が大きくなる．よって，$f(\pi,0)$ はπ の単調減少関数となる．

(B) $\pi > \pi^*$のとき，$\hat{\mu}(\pi)-r>0$ となり，したがって，$t=0$ でのϕ^*は正となる．これは投資家が危険資産に投資する行動($\phi^*>0$，正の投資) を採ることを意味する．このような正の投資であるポートフォリオϕ^* を採用する投資家にとっては，景気が良くなるほど($\pi\uparrow 1$)，危険資産に投資する量を増やす($\phi^*\uparrow$) ことで得られる収益が高くなるから，効用$f(\pi,0)$ は大きくなる．よって，$f(\pi,0)$ はπ の単調増加関数となる．

なお，前節のϕ^* の性質と以上の(A)と(B)の考察を合せると，

$$|\phi^*|\uparrow \Longrightarrow f(\pi,0)\uparrow$$

になる関係が推察されることに注意しよう．

注意3. $f(\pi,0)$ の真の分岐点がπ^* とずれる一つの理由としては，現時点(t=0) でのπとπ^*との大小関係が，それ以後の$\pi_t(0<t\leq T)$ とπ^*との大小関係と必ずしも一致しないために，現時点でのϕ^*の符号とそれ以後のϕ_t^* の符号との相違が生じ，そのために，途中で空売りや正の投資といった戦略が変化することが考えられる．しかしながら，それでもπ^*が大よその目安となりうる理由としては，次のことが挙げられる．(i)T がさほど大きくない場合，ある程度の期間で，ϕ_t^* の符号が$t=0$のそれと一致するため，上述のような不都合の影響が小さくなり，π^*がおおよその目安となる．(ii)T が大きい場合，注意1を考慮すると，(8) 式の$\bar{\pi}$がπ^*

とさほど離れていなければ，π_tのπ^*周りの大小変動の影響は打ち消され，結局，$t=0$時点近くのπの影響が残ると考えられる．その場合，$t=0$時点近くでのϕ^* の符号の効果が全期間にわたって支配的となり，したがって，π^* が大よその目安になると考えられる．実際，いくつかの数値実験では，$|\bar{\pi}-\pi^*|$ が小さいほどπ^*が実際の$f(\pi,0)$の分岐点に近づくことが観察されている．

ただし，この問題の詳細な分析については，現在も検討中であり，今後の課題としたい．

(2) 危険資産のドリフト係数の$f(\pi,0)$への影響

図2,3,4で,危険資産のドリフト係数に関するパラメータμ_0,μ_1を変動させた場合の$f(\pi,0)$の様子が示されている．

結果

(A.図2) $\mu_1\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\uparrow$

(B.図3) $\mu_0\geq r$のとき，　$\mu_0\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\uparrow$

(C.図4) $\mu_0<r$のとき，　$\mu_0\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\downarrow$

考察

この現象の経済的な解釈としては，次のことが考えられる．

(A)について，(7)式ならびに$\mu_1>\mu_0$より，$(\hat{\mu}(\pi)-r)$は十分大きなμ_1に対して常に正であるから，景気状態が不景気になる可能性が高くでも,常に投資戦略は$\phi^*>0$をみたす．また，前節のϕ^*の特徴より，μ_1 が大きいほど，$(\hat{\mu}(\pi)-r)$が大，よってϕ^*は大となる．つまり，投資家は，μ_1 が大きいほど危険資産に投資する(正の投資）ことによる収益が高くなるから，効用$f(\pi,0)$ が大きくなると考えられる．すなわち，$f(\pi,0)$ はμ_1 の増加関数となる．

(B)について，$\mu_0\geq r$ のとき，(7)式ならびに$\mu_1>\mu_0$より，$(\hat{\mu}(\pi)-r)$ が常に正であるから，景気状態が不景気になる可能性が高くでも,常に投資戦略は$\phi^*>0$をみたす．また，前節のϕ^*の特徴より，μ_0 が大きいほど，$(\hat{\mu}(\pi)-r)$が大，よってϕ^*は大となる．つまり，投資家は危険資産に投資する(正の投資)ことによる収益が高くなるから，効用$f(\pi,0)$ が大きくなると考えられる．すなわち，$f(\pi,0)$ はμ_0 の単調増加関数となると考えられる．

(C)について，$\mu_0<r$のとき，$(\hat{\mu}(\pi)-r)$ が正とは限らない，すなわち，$\phi^*>0$とは限らないので，$f(\pi,0)$ には空売りの効果が反映すると思われる．そのような空売り効果はμ_0 大きくなると共に小さくなるので$f(\pi,0)$自身も小さくなると考えられる．ただし，詳細は現在検討中である．

(3) 危険資産の拡散係数の$f(\pi,0)$への影響

図5で，危険資産の拡散係数に関するパラメータσを変動させることによる現時点(t=0)での$f(\pi,0)$の様子が示されている．

結果

$\sigma\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\downarrow$

考察

(21) 式より，危険回避の投資家に対して，ポートフォリオϕ^*の絶対値$|\phi^*|$はσの減少関数になっているから，σが大きければ大きいほど$|\phi^*|$が小さくなる．よって，上述の(1)の考察より，$f(\pi,0)$はσの減少関数になる．

(4) 景気変動の強さの$f(\pi,0)$への影響

図6,7,8,9で，景気変動の強さに関するパラメータ$\lambda_{01},\lambda_{10}$を変動させることによる現時点(t=0)での$f(\pi,0)$の様子が示されている．

(A) $\lambda_{01}/\lambda_{10}\geq 1$については，次のような傾向がみられる．

結果

(a. 図6) $\lambda_{01}>\lambda_{10}=1$のとき，$\lambda_{01}\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\uparrow$

(b. 図7) $\lambda_{10}\leq\lambda_{01}=1$のとき，$\lambda_{10}\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\downarrow$

考察

$\lambda_{01}/\lambda_{10}\geq 1$とは，景気変動が不景気から好景気に移りやすくて，好景気から不景気に移りにくいことを意味する．

このような景気状態においては，合理的な投資家はポートフォリオϕ^*を増やし，積極的に危険資産に投資するような戦略を採るのが最適であると考えられる．したがって，このような戦略をとる投資家にとっては，

(a) 好景気に向う傾向が強まるほど，

(b) 不景気に向う傾向が弱まるほど，

ϕ^*を増やし収益を高める方が効用が高くなると考えられるから，$f(\pi,0)$が

(a)λ_{01}の増加関数になり，

(b)λ_{10}の減少関数になる

のが妥当と思われる．

(B) $\lambda_{01}/\lambda_{10}\leq 1$については，次のような傾向がみられる．

結果

(c. 図8) $\lambda_{10}>\lambda_{01}=1$とき，$\lambda_{10}\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\uparrow$

(d. 図9) $\lambda_{01}\leq\lambda_{10}=1$のとき，

(i)πが0に近い場合，$\lambda_{01}\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\downarrow$

(ii)πが1に近い場合，$\lambda_{01}\uparrow\Longrightarrow f(\pi,0)\uparrow$

考察

$\lambda_{01}/\lambda_{10} \leq 1$ とは，景気変動が好景気から不景気に移りやすくて，不景気から好景気に移りにくいことを意味する．

(c) について，このような景気状態において，合理的な投資家は危険資産を空売りし ($\phi^* < 0$, 負の投資), 安全資産に投資する行動を採るのが最適であると考えられる．このような戦略をとる投資家にとっては，不景気になる傾向が強まるほど，空売り量を増やすことで ($|\phi^*| \uparrow$)，収益が高まり，効用が高くなると考えられるから，$f(\pi, 0)$ がλ_{10}の増加関数になるのが妥当と思われる．

(d) について，λ_{01} が 0 から$\lambda_{10} = 1$ に近づくと，好景気から不景気への移りやすさと不景気から好景気への移りやすさの差がなくなる．したがって，このような場合：

(i)πが 0 に近いということは，好景気になる可能性が低いと投資家が考えているから，投資家が危険資産を空売りし (負の投資), 安全資産に投資する行動を採るのが最適であると考えられる．このような戦略をとる投資家にとっては，好景気になる傾向が弱まるほど，空売り量を増やすことで ($\phi^* < 0, |\phi^*| \uparrow$) 収益が高まり，効用が高くなると考えられるから，$f(\pi, 0)$ がλ_{01} の減少関数になっていると思われる．

(ii)πが 1 に近いということは，好景気になる可能性が高いと投資家が考えていることに他ならない．この場合，ポートフォリオϕ^*を増やし，危険資産に投資する (正の投資) 行動を採るのが最適であると考えられる．このような戦略をとる投資家にとっては，好景気になる傾向が強まるほど，危険資産への正の投資する量を増やすことで ($\phi^* > 0, \phi^* \uparrow$)，収益が高まり，効用が高くなると考えられるから，$f(\pi, 0)$ がλ_{01} の増加関数になっていると思われる．

(5) 投資期間の長さTの最適消費戦略への影響

図10で，投資期間に関するパラメータTを変動させることにより, 最適消費戦略の比率c_t^*/w_t^*の様子が示されている．

結果

$T \uparrow \Longrightarrow c_t^*/w_t^* \downarrow$

考察

先のc_t^*の性質についての考察で述べたように，短期的な投資家 ($T \downarrow$) は, 投資 (w_t^*) より消費 (c_t^*) の方が得られる効用が高いと考え，逆に，長期的な投資家 ($T \uparrow$) は, 消費より投資の方が得られる効用が高いと考えるのが自然である．上記の結果はこれらのことを反映していると考えられる．

5. 結論

以上，我々は，景気変動の推定を伴う最適消費・投資戦略問題を，投資家の総効用が対数型の効用関数で与えられる場合について考察してきた．その結果，以下のことが分かった．

(1) 最適消費・投資戦略は各々 (21) 式で与えられる．その結果から，最適消費戦略の比率c_t^*/w_t^*

は景気変動に依存せず，ある決まった時間を境に変動の様子を変えることが分かった．また，最適投資戦略ϕ^* は危険資産に対する期待収益プレミアム$(\hat{\mu}(\pi)-r)$の増加関数であり，かつπの増加関数でもあることが分かった．それらの結果は投資家の投資行動についての経済的考察からも妥当と思われた．

(2) 最適戦略下での投資家の効用を調べるために，(24) 式のHJB方程式の解の数値解析を行った．その結果，最適消費・投資戦略(c_t^*, ϕ_t^*) を採る投資家の期待効用のうち，景気変動の影響を反映する部分である$f(\pi,0)$ は，πと共に単調に増加するのではなく，ある値(π^*) をおおよその分岐点として，π の凹関数になっていると観察された．これは，投資家の危険資産への最適投資戦略ϕ^* の符号の意味(すなわち，$\phi^*<0$なら，“空売り”，$\phi^*>0$なら，正の投資)を考慮すると，妥当な結果であることが分かった．また，景気変動の強さを表すパラメータ等を変化させたときも，このϕ^*の符号に注目することで，経済的に妥当な解釈ができる結果を得た．

6. 今後の課題

今後の課題としては，次の２種類のことがある．一つは，本論文のモデルで十分に検討できなかった問題の究明である．もう一つは，経済的な意味を考慮して，モデルを拡張ないしは修正して議論することの必要性である．これらを項目的に挙げると，まず前者については，

(1)$f(\pi,0)$ の真の分岐点と大よその目安π^* とのずれについての定量的分析

(2) 空売りを認めない場合の問題設定

(3)HJB方程式の解の存在，一意性等についての数学的な証明

などが考えられる．後者の課題としては，

(4) 消費と総資産に対して，投資家の選好を表す効用関数が異なるのは自然であるが，その場合における最適消費・投資問題を検討すること

(5) 景気状態Y_t は２状態マルコフ連鎖として理論を展開してきたが，Y_t がより一般的な多状態マルコフ連鎖へ拡張される場合について，本最適消費・投資問題がどのように変わるかを分析すること

(6) 本論文で扱った効用関数の場合，変数分離法でHJB方程式が簡単な形になったが，このようなことは一般には期待できない．したがって，他の効用関数(特に指数型)の場合で，変数分離法でHJB方程式が簡単化できないときに，数値解析を有効に使って最適消費・投資問題を検討すること

(7) 危険資産が一つではなくて，複数の場合について，同様の最適消費・投資問題を検討すること

などが考えられる．これらの問題については，近い将来取り組む予定である．

参考文献

[1] V.S.Bawa and R.W.Klein. *The effect of estimation risk on optimal portfolio choice.* Journal of Financial Economics, 3:215-231,1976.

[2] J.B.Detemple. *Asset pricing in a production economy with incomplete information.* Journal of Finance, 41:383-391,1986.

[3] J.Detemple and S.Murthy. *Intertemporal asset pricing with heterogeneous beliefs.* Journal of Economic Theory, 62:294-320,1994.

[4] M.U.Dothan and D.Feldman. *Equilibrium interest rates and multiperiod bonds in a partially observed economy.* Journal of Finance, 41:369-382,1986.

[5] D.Feldman. *The term structure of interest rates in a partially observable economy.* Journal of Finance, 44:789-812,1989.

[6] G.Gennotte. *Optimal portfolio choice under incomplete information.* Journal of Finance. 41:733-749,1986.

[7] Toshiki.Honda. *Optimal Portfolio Choice for Unobservable and Regime-Switching Mean Returns.* preprint,1997.5.

[8] I.Karatzas and X.Xue. *A note on utility maximization under partial observations.* Mathematical Finance, 1:57-70,1991.

[9] Y.Kuwana. *Certainty equivalence and logarithmic utilities in consumption/investment problems.* Mathematical Finance, 5:297-309,1995.

[10] R.S.Liptser and A.N.Shiryayev. *Statistics of Random Processes I.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[11] R.C.Merton. *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model.* Journal of Economic Theory, 3:373-413,1971.

[12] R.C.Merton. *On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation.* Journal of Financial Economics, 8:323-361,1980.

図1：f(π,0)の形状と意味付け

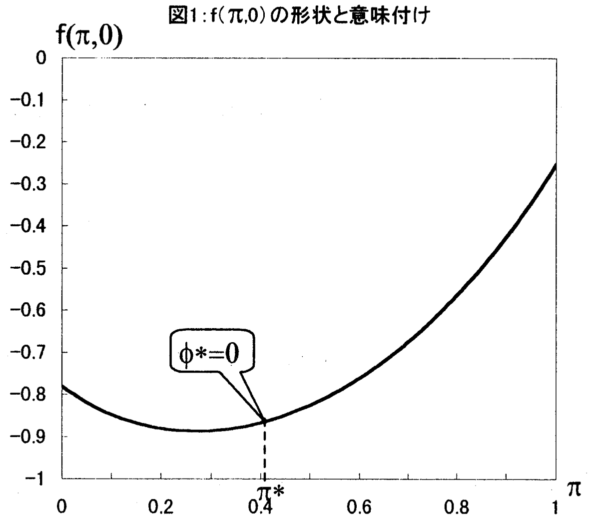


図2：危険資産のドリフト係数のf(π,0)への影響(A)

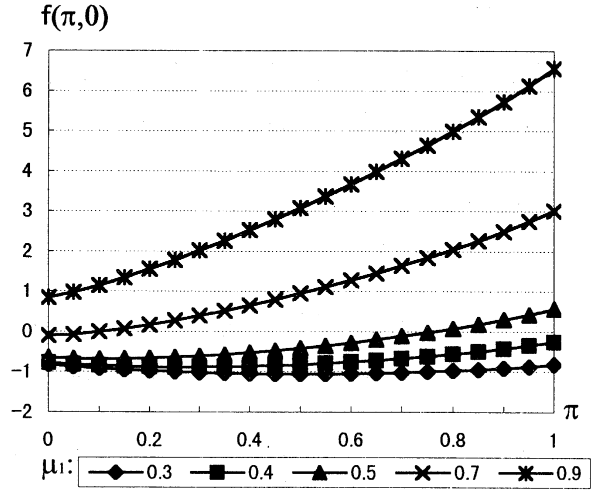


図3：危険資産のドリフト係数のf(π,0)への影響(B)

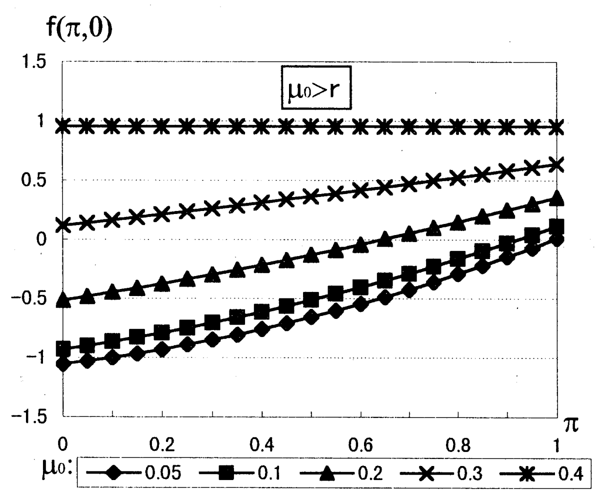


図4：危険資産のドリフト係数のf(π,0)への影響(C)

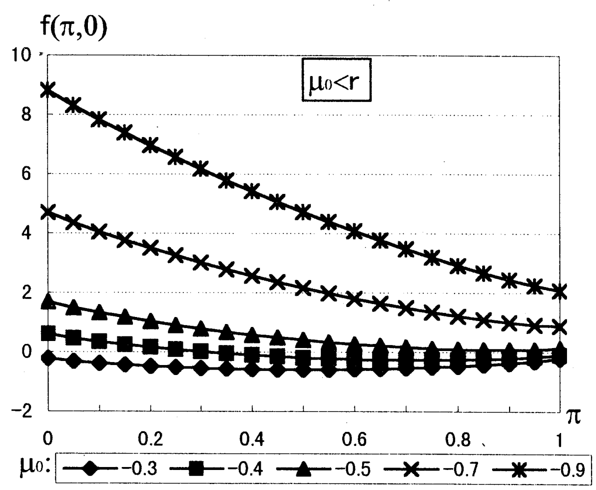
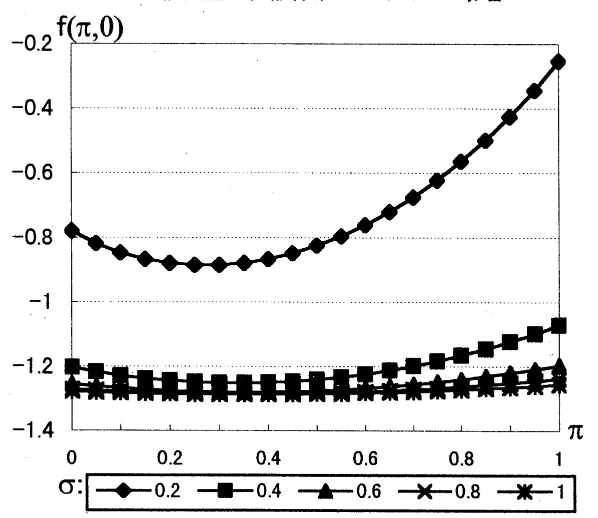


図5：危険資産の拡散係数のf(π, 0)への影響



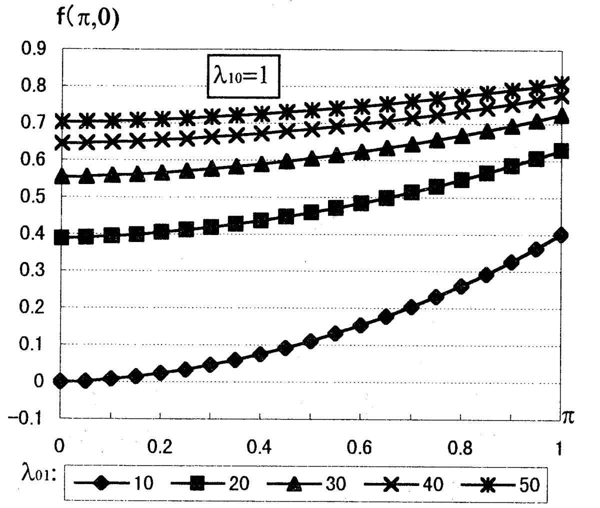


図6：景気変動の強さのf(π,0)への影響(A)

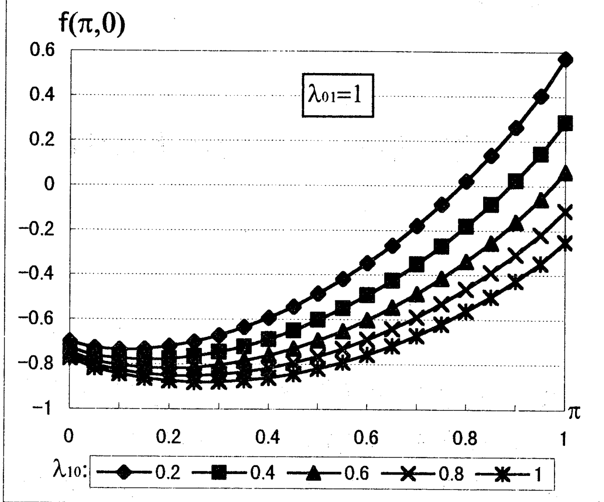


図7：景気変動の強さのf(π,0)への影響(B)

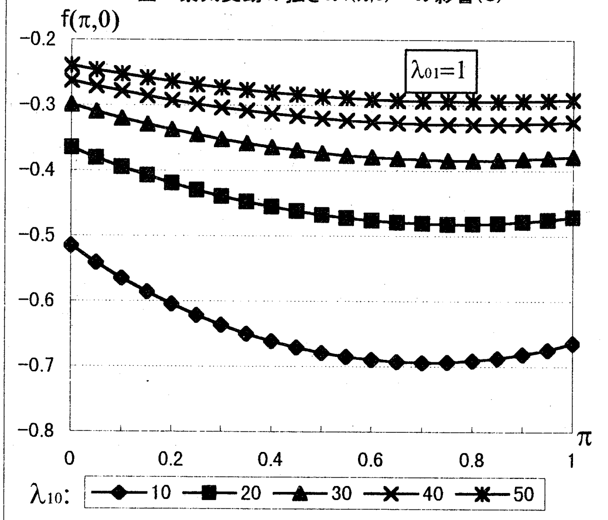


図8：景気変動の強さのf(π,0)への影響(C)

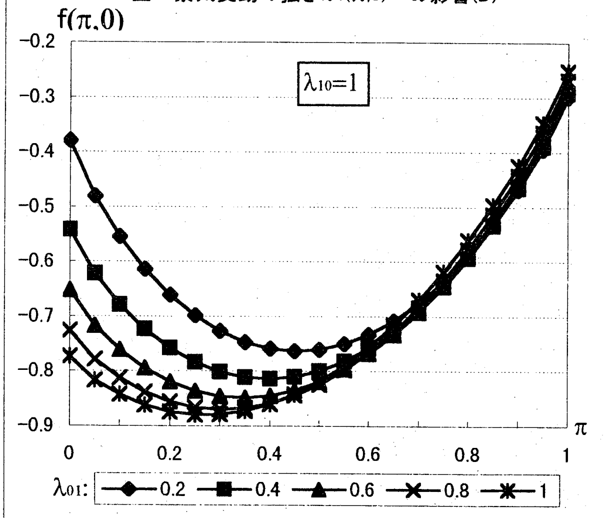


図9：景気変動の強さのf(π,0)への影響(D)

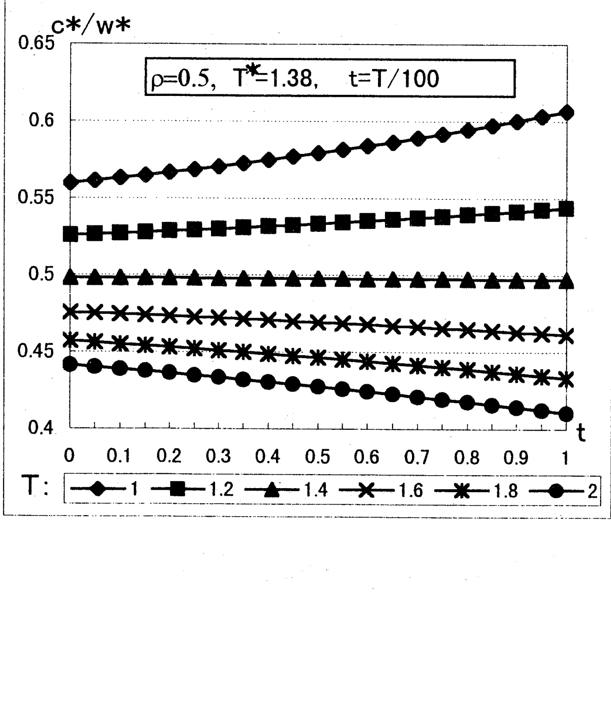


図10：投資期間Tの最適消費戦略への影響